1. Новые методы решения ОДУ, реализованные в ПК "МВТУ"

Моделирование процессов в динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), сводится к численному решению задачи Коши

,

где **x** - n-мерный вектор переменных состояния, **f** - n-мерная вектор-функция правых частей, t - независимая переменная. В ПК "МВТУ" реализованы новые численные методы решения задачи Коши:

1) явные адаптивные методы [1, 2] (Адаптивный 1, ..., Адаптивный 5);

2) диагонально-неявные FSAL-методы Рунге-Кутты [3] (DIRK33, DIRK44).

В процессе интегрирования с переменным шагом необходимо, кроме решения на очередном шаге, вычислять также оценку ошибки, которая используется для управления величиной шага. Для этого применяют две различные формулы интегрирования, дающие на m-м шаге два решения: и . Оценку ошибки получим как норму разности этих решений. Мы нормируем ошибку следующим образом:

,

где *Rtol* и *Atol* - задаваемые относительная и абсолютная точность (все действия в этой формуле выполняются покомпонентно). Оценку ошибки *err* определяем в виде $err = \|\mathbf{e}\|_\infty$, т.е. как максимальное значение среди компонент вектора **e**. Заданная точность обеспечивается, если $err \le 1$. Величина следующего шага определяется по формуле

$$h_{m+1} = fac \cdot err^{-\alpha} h_m .$$

Обычно задают $fac = 0.8 \ldots 0.9$, $\alpha = 1/(\hat{p}+1)$, где $\hat{p}$ - порядок формулы оценивания погрешности.

Рассмотрим новые методы интегрирования, реализованные в ПК "МВТУ".

Адаптивный 1

Этот метод - явный одношаговый трехстадийный (на каждом шаге производится три обращения к процедуре вычисления правых частей). Стадии выполняются по формулам

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + \beta h \mathbf{k}_1),$$
$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_2),$$

где β=1, а значение α вычисляются на основе информации предыдущего шага. Принимаем

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\beta}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1), \quad \mathbf{y}_3 = \frac{1}{\alpha\beta}(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2).$$

и покомпонентно вычисляем вектор $\mathbf{z}_1 = \mathbf{y}_3 / \mathbf{y}_2$ оценок наибольшего по модулю собственного значения матрицы $h\mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ - якобиан в текущей точке решения. Формула шага интегрирования имеет вид

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h(\mathbf{y}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{y}_2),$$
$$\mathbf{c}_2 = \begin{cases} 1/2 + \mathbf{z}_1/6, & |\mathbf{z}_1| \le 1.6, \\ -\mathbf{z}_1^{-1} - \mathbf{z}_1^{-2}, & \mathbf{z}_1 < -1.6, \\ 1.23\mathbf{z}_1^{-1}, & \mathbf{z}_1 > 1.6 \end{cases}$$

и также реализуется покомпонентно.

Для оценивания ошибки используется двухшаговая формула типа Адамса. Метод имеет второй порядок. Его рекомендуется использовать для решения нежестких и жестких задач с вещественным жестким спектром при низких требованиях к точности ($Rtol \ge 10^{-3}$).

Адаптивный 2

Расчетные формулы этого метода практически такие же, как у метода Адаптивный 1. Отличие заключается в том, что ошибка решения оценивается по правилу Рунге, т.е. используя один шаг размером h и два шага размером h/2. Метод имеет третий порядок. Его рекомендуется использовать для решения жестких задач с вещественным жестким спектром при низких требованиях к точности ($Rtol \ge 10^{-3}$).

Адаптивный 3

Явный четырехстадийный адаптивный метод реализован в соответствии с формулами (все арифметические операции с векторами выполняются покомпонентно):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0),\\
&\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + \beta h \mathbf{k}_1),\\
&\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_2),\\
&\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_3),\\
&\mathbf{y}_1 = \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\beta}(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1), \quad \mathbf{y}_3 = \frac{1}{\alpha\beta}(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2),\\
&\mathbf{y}_4 = \frac{1}{\alpha^2\beta}(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_3), \quad \mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{y}_4}{\mathbf{y}_3},\\
&\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2/2 + \mathbf{c}_3\mathbf{y}_3),\\
&\mathbf{c}_3 = \begin{cases} 1/6 + \mathbf{z}_1/24, & |\mathbf{z}_1| \le 2,\\ \dfrac{\mathbf{z}_1^{-1}(\mathbf{z}_1^{-1} + 1)}{2(\mathbf{z}_1^{-1} - 1)}, & \mathbf{z}_1 < -2,\\ \dfrac{1}{2}\mathbf{z}_1^{-1}, & \mathbf{z}_1 > 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Для оценивания погрешности используется формула

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_0 + h(b_1\mathbf{k}_1 + b_2\mathbf{k}_2 + b_3\mathbf{k}_3 + b_4\mathbf{x}_1'),$$

где коэффициенты $b_1,...,b_4$ рассчитываются в зависимости от значения α. Метод имеет 4-й порядок для линейных и 3-й для нелинейных систем. Его рекомендуется использовать для интегрирования жестких систем с вещественным жестким спектром при средних требованиях к точности ($Rtol = 10^{-3} \ldots 10^{-5}$)

Адаптивный 4

Этот метод является многошаговым и реализуется в 3 этапа:

1) прогноз по явной формуле Адамса;

2) покомпонентное оценивание наибольшего собственного значения;

3) покомпонентная коррекция по неявной многошаговой формуле.

Формула коррекции позволяет стабилизировать расчетную схему в полученных точках жесткого спектра. Метод имеет переменный порядок (от 2-го до 6-го). Для оценивания погрешности используется многошаговая формула более низкого порядка. Данный метод рекомендуется использовать для решения нежестких и жестких задач с вещественным жестким спектром при любых требованиях к точности.

Адаптивный 5

Стадии явного пятистадийного одношагового метода выполняются по формулам

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + \beta h \mathbf{k}_1),$$
$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_2),$$
$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_3),$$
$$\mathbf{k}_5 = \mathbf{f}(t_0 + \beta h, \mathbf{x}_0 + (\beta - \alpha) h \mathbf{k}_1 + \alpha h \mathbf{k}_4).$$

На основе полученной информации вычисляются покомпонентные оценки двух наибольших по модулю собственных значений (которые могут быть комплексно-сопряженными). Шаг интегрирования выполняется по формуле

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h(b_1 \mathbf{k}_1 + b_2 \mathbf{k}_2 + b_3 \mathbf{k}_3),$$

где коэффициенты b_1, b_2, b_3 вычисляются с использованием полученных оценок наибольшего собственного значения. Оценка ошибки решения производится по двухшаговой формуле.

Метод имеет 4-й порядок для линейных и 3-й для нелинейных систем. Его рекомендуется использовать для решения умеренно жестких задач с комплексным жестким спектром, а также осциллирующих задач с собственными значениями якобиана вблизи мнимой оси.

DIRK33

Диагонально неявный метод Рунге-Кутты (DIRK - Diagonally Implicit Runge-Kutta) реализуется с использованием трех неявных стадий и имеет третий порядок. Первая стадия является явной и совпадает с последней стадией предыдущего шага, поэтому методы такого типа обычно называют FSAL-методами [2] (FSAL - First Same As Last). Один шаг метода выполняется в соответствии с формулами

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0),$$
$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f}\left(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j + \gamma \mathbf{k}_i\right), \quad i = 1, \ldots, s-1, \tag{1}$$
$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} b_i \mathbf{k}_i + \gamma \mathbf{k}_s, \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_0 + h \sum_{i=1}^{s-1} \hat{b}_i \mathbf{k}_i.$$

Здесь s=3 - число неявных стадий, а коэффициенты метода равны

$$
\begin{aligned}
&\gamma = a_{21} = 0.158983899988677,\\
&c_2 = 2\gamma, \quad c_3 = \left(2+\sqrt{2}\right)\gamma, \quad a_{31} = a_{32} = (c_3 - \gamma)/2,\\
&b_3 = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{6\gamma^2 - 6\gamma + 1}{6\gamma^2}, \quad b_1 = b_2 = (1 - b_3 - \gamma)/2,\\
&\hat{b}_2 = \left(\sqrt{2}+1\right)\frac{\sqrt{2}-2+3\gamma}{12\gamma^2}, \quad \hat{b}_3 = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1-3\gamma}{6\gamma^2}, \quad \hat{b}_1 = 1 - \hat{b}_2 - \hat{b}_3 - \gamma.
\end{aligned}
$$

Детали реализации изложены в [2].

Метод рекомендуется использовать для решения жестких и дифференциально-алгебраических систем при низких и средних требованиях к точности ($Rtol \geq 10^{-5}$).

DIRK44

Диагонально неявный FSAL-метод Рунге-Кутты реализуется с использованием четырех неявных стадий и имеет четвертый порядок. Один шаг метода выполняется в соответствии с формулами (1) при s=4. Коэффициенты метода равны

$$
\begin{aligned}
&\gamma = a_{21} = 0.220428410259212,\\
&c_2 = 2\gamma, \quad c_3 = 0.752589667839344, \quad c_4 = 0.610097451414243,\\
&a_{31} = a_{32} = 0.266080628790066, \quad a_{41} = a_{42} = 0.227031047465079,\\
&a_{43} = -0.064393053775127, \quad b_1 = b_2 = 0.175575441883476,\\
&b_3 = -0.415534431720558, \quad b_4 = 0.843955137694394,\\
&\hat{b}_1 = \hat{b}_2 = 0.217113586697490, \quad \hat{b}_3 = 0.414811674412460,\\
&b_4 = 0.150961152192560.
\end{aligned}
$$

Метод рекомендуется использовать для решения жестких и дифференциально-алгебраических систем при средних и высоких требованиях к точности ($Rtol \leq 10^{-3}$).

2. Тестовые задачи

Для тестирования использовались известные задачи, несложные для программирования, но трудные для численного решения. Были выбраны первые шесть из набора жестких тестовых задач, приведенного в [3]. Дадим математические описания этих задач, используя форму записи уравнений, принятую в блоке "Новый" ПК "МВТУ". Для всех задач приводим также интервал интегрирования *T*.

VDPOL - жесткий осциллятор Ван-дер-Поля:

```
init  y1=2, y2=0;
y1' = y2;
y2' = 1e6*((1 - y1^2)*y2 - y1);
```

T = 3.

ROBER - реакция Робертсона:

```
init  y1=1, y2=0, y3=0;
y1' = -0.04*y1 + 1e4*y2*y3;
y2' =  0.04*y1  - 1e4*y2*y3 - 3e7*y2^2;
y3' =  3e7*y2^2;
```

T = 1e11.

OREGO - орегонатор, знаменитая модель с периодическим решением, описывающая реакцию Белоусова-Жаботинского:

```
init  y1=1, y2=2, y3=3;
y1' = 77.27*( y2 + y1*(1 - 8.375e-6*y1 - y2) );
y2' = (y3 - (1+y1)*y2) / 77.27;
y3' = 0.161*(y1-y3);
```

T = 360.

HIRES - химическая реакция с участием восьми реагентов, была предложена для объяснения роста и дифференциации растительной ткани. Уравнения имеют вид:

```
init  y1=1, y2=0, y3=0, y4=0, y5=0, y6=0, y7=0, y8=0.0057;
y1' = -1.71*y1 + 0.43*y2 + 8.32*y3 + 0.0007;
y2' =  1.71*y1 - 8.75*y2;
y3' = -10.03*y3 + 0.43*y4 + 0.035*y5;
y4' =  8.32*y2 + 1.71*y3 - 1.12*y4;
y5' = -1.745*y5 + 0.43*y6 + 0.43*y7;
y6' = -280*y6*y8 + 0.69*y4 + 1.71*y5 - 0.43*y6 + 0.69*y7;
y7' =  280*y6*y8 - 1.81*y7;
```

y8' = -280*y6*y8 + 1.81*y7;
T = 321.8122.

E5 - задача о химической реакции, получившая имя "E5" в тестовом наборе STIFF DETEST. Определяется уравнениями:

init y1=1.76e-3, y2=0, y3=0, y4=0;
A=7.89e-10; B=1.1e7; C=1.13e3; M=1e6;
y1' =-A*y1 - B*y1*y3;
y2' = A*y1 - M*C*y2*y3;
y3' = A*y1 - B*y1*y3 - M*C*y2*y3 + C*y4;
y4' = B*y1*y3 - C*y4;
T = 1e7.

PLATE - это линейная и неавтономная задача средней жесткости. Она описывает движение прямоугольной пластины под тяжестью проезжающего через нее автомобиля:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \Delta\Delta u = f(x, y, t)$$

Пластина $\{(x, y);\ \ 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4/3\}$ дискретизируется на сетке из 8×5 внутренних точек ($x_i = ih, y_i = ih, h = 2/9$), граничные и начальные условия - нулевые. Интервал интегрирования взят *T*=7. Нагрузка $f(x, y, t)$ идеализированно представляется в виде суммы двух гауссовых кривых, движущихся в *x*-направлении и соответствующих "колесам":

$$f(x, y, t) = \begin{cases} 200\left(\exp(-5(t-x-2))^2 + \exp(-5(t-x-5))^2\right), & y = y_2 \text{ или } y_4, \\ 0 & \text{для иных значений } y. \end{cases}$$

Оператор пластины $\Delta\Delta$ дискретизируется с помощью стандартной "вычислительной молекулы":

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

В качестве значений параметров трения и жесткости выбраны величины $\omega = 1000$ и $\sigma = 100$. В результате получается система, состоящая из 80 дифференциальных уравнений и имеющая отрицательные, а также комплексные собственные значения в диапазоне $-500 \le \mathrm{Re}\,\lambda < 0$-500 с максимальным углом $\alpha = 71^{\circ}$.

3. Результаты тестирования

Каждая задача решалась при пяти значениях задаваемой относительной точности *Rtol*=*Tol* (1e-2, 1e-3, ..., 1e-6). В качестве меры вычислительной работы использовалось число вычислений функции *Nf*. При этом для неявных методов учитывались также вычисления функции, выполняемые при расчете матрицы Якоби путем численного дифференцирования. Фактическая точность оценивалась по формуле

$$scd = -\log 10(err),$$

где *err* - максимальная (среди всех компонент решения) относительная ошибка в конце интервала интегрирования. Таким образом, *scd* - минимальное число правильных значащих цифр среди всех компонент численного решения.

Для всех задач использовался одинаковый начальный шаг h_0=1e-6. Абсолютная точность принималась *Atol*=*Tol* для VDPOL, *Atol*=1e-12**Tol* для ROBER, *Atol*=1e-6**Tol* для OREGO, *Atol*=1e-4**Tol* для HIRES, *Atol*=1e-24**Tol* для E5, *Atol*=1e-3**Tol* для PLATE.

В табл. 1...6 приведены результаты решения тестовых задач. В число испытуемых включены также реализованные в ПК "МВТУ" метод Гира переменного порядка (от 1 до 6) и диагонально неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка (ДиагН). Для сравнения в нижней части таблицы приводятся результаты, полученные неявными решателями системы MATLAB: ode15s - многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5), основанный на формулах численного дифференцирования, ode23s - метод Розенброка 2-го порядка, ode23t - метод трапеций 2-го порядка, ode23tb - диагонально неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка. При решении задач ROBER, E5, PLATE некоторые явные методы ПК "МВТУ" и некоторые неявные методы системы MATLAB не обеспечивали качественно правильного решения задачи либо требовали чрезмерно больших затрат машинного времени при любых значениях точности. В этих случаях результаты для таких методов не приводятся.

Таблица 1. Результаты решения тестовой задачи VDPOL

Метод	*Tol*=1e-2 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-3 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-4 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-5 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-6 *scd*	*Nf*
Адап1	0.85	1178	1.30	3543	1.80	9614	2.38	25429	3.05	67552
Адап2	0.74	2669	1.03	4022	1.52	8955	2.08	21934	2.78	55760
Адап3	1.49	3531	2.89	4522	3.70	8104	4.74	19120	5.67	49864
Адап4	2.38	1361	3.05	1875	3.65	2621	4.87	4203	5.89	6409
Адап5	1.84	3241	3.16	5476	5.21	12053	5.80	31262	6.56	81290
Гира	0.44	1232	1.76	1654	2.43	2335	3.28	2988	4.25	3892
ДиагН	1.39	1690	1.98	3256	2.69	6135	3.50	13113	4.20	28386
DIRK33	2.04	1749	3.51	2260	3.53	3512	4.09	5741	4.76	10231
DIRK44	2.05	2264	2.41	3206	3.44	4252	5.66	7177	6.19	11700
Ode15s	0.37	1511	1.84	1914	2.76	2566	3.42	3343	4.49	4725
Ode23s	1.52	1646	2.17	3710	2.82	9871	3.48	25914	4.14	67957
Ode23t	-0.24	494	1.74	2092	2.64	3778	3.35	7833	4.11	16530
Ode23tb	-0.30	1047	1.75	2919	2.28	5438	2.95	10130	3.66	20151

Таблица 2. Результаты решения тестовой задачи ROBER

Метод	*Tol*=1e-2 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-3 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-4 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-5 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-6 *scd*	*Nf*
Адап1	1.34	1561	1.82	4817	2.31	14618	2.76	44804	3.20	137561
Адап2	1.30	3507	1.73	6370	2.21	14795	2.64	41182	3.04	128502
Гира	1.35	605	2.23	767	3.06	983	3.80	1370	5.26	1705
ДиагН	1.89	847	2.48	1683	3.13	3539	3.78	7565	4.44	16180
DIRK33	2.56	519	3.26	796	3.95	1332	4.67	2231	5.43	3860
DIRK44	2.97	614	3.82	868	5.08	1333	5.58	2149	6.46	3838
Ode15s	2.16	500	2.86	739	3.62	1018	4.83	1358	5.93	1806
Ode23s	1.97	807	2.85	1723	3.28	4155	4.12	13207	4.97	81650
Ode23tb	1.79	620	2.43	1195	3.15	2354	3.80	4982	4.43	10722

Таблица 3. Результаты решения тестовой задачи OREGO

Метод	*Tol*=1e-2 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-3 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-4 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-5 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-6 *scd*	*Nf*
Адап1	0.19	2055	0.60	5061	1.12	12548	1.78	28884	2.57	65837
Адап2	0.12	3080	0.51	6040	1.05	13762	1.74	30636	2.65	64497
Адап3	2.18	5448	2.15	6446	2.32	9433	2.66	18782	3.75	43740
Адап4	2.50	1776	2.74	2367	3.46	3196	4.66	4486	5.55	6186
Адап5	1.08	3947	1.51	6549	2.12	13235	2.82	30807	3.60	75871

Гира	1.15	1258	1.57	1678	2.61	2309	2.95	2931	3.90	3716
ДиагН	0.46	1876	1.12	3216	1.83	6333	2.49	12648	3.19	26391
DIRK33	0.91	1708	1.89	2220	2.41	3201	3.26	5264	4.00	9164
DIRK44	1.47	1963	2.50	2779	3.76	4111	4.76	6711	5.85	12341
Ode15s	-0.38	704	1.97	1792	2.74	2390	3.28	2957	4.72	3914
Ode23s	0.52	1799	1.29	4067	2.10	10109	2.91	24813	3.74	60469
Ode23t	0.00	688	0.00	963	1.88	3247	2.46	6119	3.16	12028
Ode23tb	0.00	840	-2.15	2107	1.86	4327	2.57	8386	3.27	17209

Таблица 4. Результаты решения тестовой задачи HIRES

Метод	*Tol*=1e-2		*Tol*=1e-3		*Tol*=1e-4		*Tol*=1e-5		*Tol*=1e-6	
	scd	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*
Адап1	0.20	785	1.00	1359	1.79	2876	2.79	7186	4.12	17826
Адап2	0.53	1286	1.05	1635	2.18	2861	2.73	5519	2.96	11684
Адап3	0.87	1939	1.27	2199	1.75	3070	4.65	6501	4.28	14925
Адап4	1.59	1060	3.40	1244	4.27	1502	4.94	2035	6.50	2283
Адап5	0.95	942	1.47	1585	1.97	3698	2.61	9191	3.33	22669
Гира	0.95	477	2.20	598	3.27	756	3.95	1016	5.24	1178
ДиагН	1.83	602	2.54	986	3.22	2014	3.79	3959	4.30	7936
DIRK33	2.31	413	3.82	629	5.00	1113	5.64	1951	6.50	3166
DIRK44	1.73	427	2.70	702	4.25	1170	4.86	1896	5.68	3277
Ode15s	1.39	347	2.29	423	3.28	524	4.54	680	5.77	848
Ode23s	2.33	992	3.26	2555	4.05	6563	4.78	16619	5.47	41158
Ode23t	1.39	337	2.17	494	2.94	831	3.78	1519	4.28	3060
Ode23tb	1.54	393	1.80	610	2.39	1108	3.03	2024	3.72	4179

Таблица 5. Результаты решения тестовой задачи E5

Метод	*Tol*=1e-2		*Tol*=1e-3		*Tol*=1e-4		*Tol*=1e-5		*Tol*=1e-6	
	scd	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*	*scd*	*Nf*
Гира	0.27	470	2.56	605	3.08	769	5.69	1099	5.22	1509
ДиагН	1.65	629	2.31	1285	2.96	2721	3.60	5738	4.24	12245
DIRK33	2.37	499	2.85	709	3.78	1105	4.76	1934	5.20	3125
DIRK44	0.62	447	3.16	741	3.56	1169	3.89	2063	7.55	4252
Ode15s	-0.28	463	0.96	630	1.71	769	2.93	986	2.78	1386
Ode23tb	0.81	465	0.75	840	0.91	1861	1.88	3684	4.41	7744

Таблица 6. Результаты решения тестовой задачи PLATE

Метод	*Tol*=1e-2 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-3 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-4 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-5 *scd*	*Nf*	*Tol*=1e-6 *scd*	*Nf*
Гира	2.58	317	3.38	438	3.62	679	4.72	1101	5.44	1402
ДиагН	2.25	442	3.07	1014	4.01	2417	4.62	5453	5.34	11487
DIRK33	3.10	572	4.20	1255	5.15	2818	5.85	4449	7.02	6815
DIRK44	3.80	521	4.69	1073	5.71	2189	7.70	4649	8.66	10015
Ode15s	2.92	296	3.11	418	4.17	589	5.10	790	5.99	887
Ode23t	2.31	215	2.78	352	3.36	538	4.02	987	4.55	1946
Ode23tb	2.58	327	3.45	625	3.97	1313	4.78	2776	5.48	5794

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скворцов Л. М. Явные адаптивные методы численного решения жестких систем // Математическое моделирование. -2000. -Т. 12, № 12. -С. 97-107.
2. Скворцов Л. М. Диагонально неявные FSAL-методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Математическое моделирование. -2002. -Т. 14, № 2. -С. 3-17.
3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. -М.: Мир, -1999. -685 с.